Prólogo

Cumpliendo la tradición, como cada ocho o nueve años desde hace más de treinta, Editorial Deimos publica su quinto volumen de la colección *Problemas de Oposiciones a Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas*, cuyo primer volumen recogía problemas propuestos en 1969. En este quinto volumen se resuelven los problemas propuestos desde 2006 a 2012 por los tribunales que han juzgado las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, en la especialidad de Matemáticas, en las diferentes Comunidades Autónomas.

Los problemas están ordenados según el año de celebración de la Oposición en la que fueron propuestos y, por supuesto, según la Comunidad donde se propusieron. No obstante, tras el índice cronológico que sigue a este prólogo, el lector encontrará un índice temático en el que podrá seleccionar todos aquellos problemas referidos a un mismo concepto matemático y cuya resolución en línea hará que el lector reconozca más fácilmente técnicas y procedimientos de resolución de dicho tipo de problemas.

Algunos de los problemas que aparecen en el libro ya fueron propuestos en anteriores convocatorias y figuran resueltos en los volúmenes 1, 2, 3 ó 4 de la colección *Problemas de Oposiciones. Matemáticas* (véanse las Publicaciones del final del libro). En tales casos hemos optado por remitir al lector al volumen de los anteriores en el que figura resuelto el problema, o bien, por presentar una solución alternativa cuando contiene ideas sustancialmente diferentes a las expuestas en el volumen citado.

En los problemas que aparecen por primera vez presentamos más de una solución completa en la mayoría de ellos y, para no quedarnos cortos, en casi todos añadimos unas observaciones al final de cada solución en la que precisamos, explicamos, enunciamos o demostramos aquellos resultados a los que se ha recurrido para resolver el problema. En dichas observaciones el lector encontrará los Teoremas de Menelao, de Ceva, de Routh, de Viviani, el Principio de Reflexión, tanto en su versión geométrica como en su versión combinatoria, el Teorema de Arzelá sobre la permutación entre límites e integrales de sucesiones de funciones y otros muchos resultados que le evitarán buscar el enunciado o la demostración de un teorema en otros libros.

No debe por ello el lector dejarse intimidar por la extensión de algunas de las soluciones, y es que no hemos reparado a la hora de explicarnos de todas las formas posibles. Haría bien el lector, y más si se trata de un opositor, en leer todas las soluciones de un mismo problema y no limitarse a una de ellas, pues estamos seguros que de todas aprenderá, como también lo hará de las observaciones que les siguen, que para eso han sido escritas.

Por último, queremos agradecer la colaboración de todos aquéllos que han contribuido a que este libro sea algo más que un libro de problemas al uso: desde los que nos han remitido enunciados de problemas, a los que nos han enseñado soluciones más simples que las que nosotros propusimos, pasando por todos los que observaron, apuntaron, criticaron o demolieron cualquier cosa que les pareció mal en la escritura del libro. Agradecemos en especial las valiosas sugerencias recibidas de Mª Paz Cembellín Santos, Manuel López Olmedo y Mª Isabel Rodríguez Cartagena.

Madrid, Noviembre 2013

LOS AUTORES

Índice cronológico de problemas

Año 2002

Año 2006

Año 2008

Año 2009

Año 2010

Año 2012

Índice temático de problemas

Números y combinatoria

Álgebra

Cálculo diferencial

Cálculo integral

Geometría

Estadística y Probabilidad

Didáctica de las Matemáticas

Problemas extraídos del tomo.

(págs. 82 a 84):

06.5. Discuta las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$ según los valores reales de m y obténgalas.

(Asturias)

Este problema figura resuelto en [Vol. 1] pág. 568, de manera diferente a la que aquí se propone.

Solución:

Recurrimos al *cambio de variable de Tschirnhaus* (véase la observación del final del problema) para resolver la ecuación. Si $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ son las cuatro raíces de $p(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m$, según la primera de las *Fórmulas de Cardano* es $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, por lo que el baricentro de las raíces es:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Entonces, la transformación de Tschirnhaus, $y = x - 2$, convierte al polinomio $p(x)$ en el polinomio:

$$q(y) = p(y+2) = (y+2)^4 - 8(y+2)^3 + 22(y+2)^2 - 24(y+2) + m =$$

$$= y^4 - 2y^2 + (m-8)$$

El polinomio $q(y)$ es bicuadrado y sus raíces cumplen:

$$y^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(m-8)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(9-m)}}{2} = 1 \pm \sqrt{9-m}$$

es decir,

$$y = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{9-m}}$$

En consecuencia, las cuatro raíces de $p(x)$ son:

$$x_1 = 2 + \sqrt{1+\sqrt{9-m}}\ , \qquad x_2 = 2 - \sqrt{1+\sqrt{9-m}}\ ,$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{1-\sqrt{9-m}}\ , \qquad x_4 = 2 - \sqrt{1-\sqrt{9-m}}$$

Discutimos ahora cuál es la multiplicidad de las raíces anteriores y cuántas de ellas son reales. Dado que las ecuaciones $9-m=0$ y $1-\sqrt{9-m}=0$ admiten por soluciones respectivas a $m=9$ y $m=8$, y que $1+\sqrt{9-m}=0$ no tiene soluciones reales, parece razonable distinguir los siguientes casos:

1. Si $m<8$, las raíces x_1 y x_2 son reales y distintas, mientras que ni x_3 ni x_4, que son distintas, son reales.

2. Si $m=8$, son $x_1 = 2+\sqrt{2}$, $x_2 = 2-\sqrt{2}$, $x_3 = x_4 = 2$, así que $p(x)$ tiene cuatro raíces reales, dos simples y una doble.

3. Si $8<m<9$, entonces $9-m>0$ y $1-\sqrt{9-m}>0$, por lo que $p(x)$ tiene cuatro raíces reales y simples.

4. Si $m=9$, entonces son $x_1 = x_3 = 3$ y $x_2 = x_4 = 1$, así que $p(x)$ tiene dos raíces reales dobles.

5. Si $m>9$, las cuatro raíces son distintas y ninguna de ellas es real.

OBSERVACIÓN

El cambio de variable $y = x - g$, donde g es el baricentro de las raíces de un polinomio $p(x)$ de grado $n > 0$, se llama *Transformación de Tschirnhaus* y convierte a $p(x)$ en otro polinomio $q(y)$ del mismo grado n y que tiene nulo el coeficiente del término de grado $n-1$.
Esto último, apelando a la *primera fórmula de Cardano*, significa que el baricentro de las raíces de $q(y)$ está en el origen, y es por ello que encontrar las raíces de éste suele ser tarea más sencilla que localizar las de $p(x)$. Veamos, dado el polinomio de grado $n > 0$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, el baricentro de sus raíces $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ es, según la *primera fórmula de Cardano*,

$$g = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n}$$

Entonces, la *transformación de Tschirnhaus*,

$$y = x - g = x + \frac{a_{n-1}}{n a_n}$$

convierte al polinomio $p(x)$ en otro polinomio:

$$q(y) = p\left(y - \frac{a_{n-1}}{n a_n}\right) = a_n \left(y - \frac{a_{n-1}}{n a_n}\right)^n + a_{n-1}\left(y - \frac{a_{n-1}}{n a_n}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 =$$

$$= a_n \left(y^n - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{n-1} + \ldots\right) + a_{n-1}\left(y^{n-1} + \ldots\right) + \ldots$$

donde los puntos suspensivos denotan sumas de monomios de grado menor que $n-1$. Por ello, los términos en y^{n-1} se cancelan y resulta que el polinomio $q(y) = a_n y^n + b_{n-2} y^{n-2} + \ldots + b_0$ carece de término en y^{n-1}, o lo que es lo mismo, tiene el baricentro de sus raíces en el origen. Obsérvese que las raíces de p se obtienen restando $\frac{a_{n-1}}{na_n}$ a las raíces de q.

(págs. 114 a 115):

06.14. Sean a, b, c, d números enteros. Demuestre que el producto

$$abcd\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)\left(a^2-d^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(b^2-d^2\right)\left(c^2-d^2\right)$$

es divisible por 7.

(Baleares. Opción B)

Primera solución:

Llamamos P al producto del enunciado. Distinguimos los dos casos siguientes:

i) Si al menos uno de los números enteros a, b, c, d es múltiplo de 7, evidentemente también lo es P.

ii) Si ninguno de los números a, b, c, d es múltiplo de 7, cada uno de ellos es congruente con 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 módulo 7, o lo que es igual, con 1, 2, 3, -3, -2 ó -1 módulo 7, y por tanto cada uno de los cuadrados a^2, b^2, c^2, d^2 es congruente con 1, 4 ó 9 módulo 7, es decir, con 1, 4 ó 2 módulo 7. Esto supone que al menos dos de los cuadrados a^2, b^2, c^2, d^2 son congruentes entre sí módulo 7, lo que significa que su diferencia es congruente con 0 módulo 7, es decir, es múltiplo de 7, así que también P es múltiplo de 7.

De i) y ii) se desprende que P es, en cualquier caso, múltiplo de 7.

Segunda solución:

Llamaremos, por comodidad, $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$ y $d = n_4$. Si es P el producto del enunciado, podemos escribir:

$$P = n_1 n_2 n_3 n_4 \left(n_1^2 - n_2^2\right)\left(n_1^2 - n_3^2\right)\left(n_1^2 - n_4^2\right)\left(n_2^2 - n_3^2\right)\left(n_2^2 - n_4^2\right)\left(n_3^2 - n_4^2\right)$$

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que P no es múltiplo de 7, lo que equivale, por ser 7 primo, a que ninguno de los factores n_i o $n_j^2 - n_k^2$ es múltiplo de 7. En estas condiciones, el conjunto de siete números enteros:

$$S = \left\{n_1,\ n_1 - n_2,\ n_1 + n_2,\ n_1 - n_3,\ n_1 + n_3,\ n_1 - n_4,\ n_1 + n_4\right\}$$

es un sistema completo de restos módulo 7, es decir, cualquier entero es congruente módulo 7 con uno y sólo uno de los números enteros de S. Para demostrarlo, basta ver que no hay dos números de S que sean congruentes entre sí módulo 7. Así es, pues:

- Si $n_1 \equiv n_1 - n_k \pmod 7$ o $n_1 \equiv n_1 + n_k \pmod 7$, para algún $k \in \{2,3,4\}$, también sería $n_k \equiv 0 \pmod 7$ y n_k sería múltiplo de 7, contra la hipótesis.

- Si, para algunos $j,k \in \{2,3,4\}$, con $j < k$, fuese $n_1 - n_j \equiv n_1 - n_k \pmod 7$ o $n_1 + n_j \equiv n_1 + n_k \pmod 7$, entonces sería $n_j \equiv n_k \pmod 7$, y por tanto, $n_j^2 \equiv n_k^2 \pmod 7$, es decir, $n_j^2 - n_k^2 \equiv 0 \pmod 7$ y $n_j^2 - n_k^2$ sería divisible por 7, lo que contradice nuestra suposición.

- Por último, si $n_1 - n_j \equiv n_1 + n_k \pmod 7$ o $n_1 + n_j \equiv n_1 - n_k \pmod 7$, para ciertos $j, k \in \{2,3,4\}$, con $j < k$, deduciríamos $n_j \equiv -n_k \pmod 7$ y, por tanto, $n_j^2 \equiv n_k^2 \pmod 7$, es decir, $n_j^2 - n_k^2 \equiv 0 \pmod 7$ y $n_j^2 - n_k^2$ sería múltiplo de 7, lo que va igualmente contra nuestra hipótesis.

Resulta así, en el supuesto de que P no sea divisible por 7, que el conjunto S es un sistema completo de restos módulo 7. Pero esto es asimismo absurdo, pues en tal caso alguno de ellos debería ser congruente con 0 módulo 7, es decir, divisible por 7, y también lo sería P, que es múltiplo del producto de los siete números.

(págs. 129 a 131):

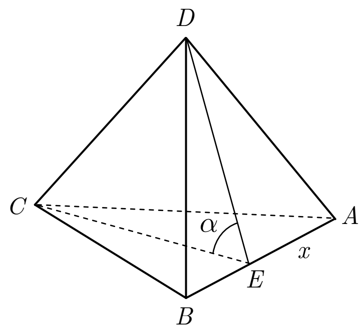
06.24. Consideremos un tetraedro regular de vértices A, B, C y D. Si el punto E recorre la arista AB, ¿cuándo es máximo el ángulo $\measuredangle CED$?

(Comunidad Valenciana)

Primera solución:

No hay pérdida de generalidad en suponer que el tetraedro tiene arista de longitud 1. Sea α el ángulo $\measuredangle CED$ y sea $x \in [0,1]$ la longitud del segmento AE. Si aplicamos el *Teorema del coseno* al triángulo AEC se tiene que:

$$EC^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$



es decir,

$$EC^2 = x^2 + 1 - 2x \cdot \frac{1}{2} = x^2 + 1 - x$$

Por evidente simetría, la longitud EC es igual a la longitud ED y al aplicar de nuevo el *Teorema del coseno*, pero ahora al triángulo ECD, se tiene:

$$1 = CD^2 = EC^2 + DC^2 - 2EC \cdot DC \cdot \cos\alpha$$

esto es,

$$1 = \left(x^2 - x + 1\right) + \left(x^2 - x + 1\right) - 2\left(\sqrt{x^2 - x + 1}\right)^2 \cos\alpha$$

o bien:

$$1 = 2\left(x^2 - x + 1\right)\left(1 - \cos\alpha\right)$$

Y al despejar:

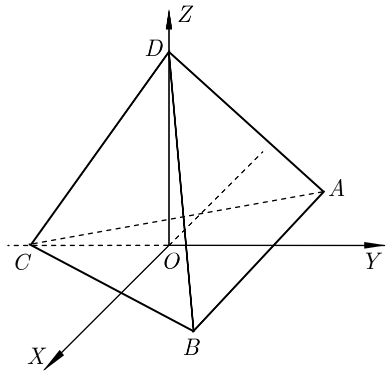
$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2\left(x^2 - x + 1\right)} = 1 - \frac{1}{2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} \qquad (1)$$

Dado que la función coseno es decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, el ángulo α será máximo cuando $\cos\alpha$ sea mínimo, así que debemos buscar el valor de $x \in [0,1]$ que haga mínima la función dada en (1), lo que equivale a calcular $x \in [0,1]$ para que el denominador $2[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]$ sea mínimo, cosa que ocurre en $x = \frac{1}{2}$.

Así, pues, el ángulo $\measuredangle CED$ es máximo cuando E es el punto medio del lado AB. Sustituyendo $x = \frac{1}{2}$ en (1) se obtiene $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, que corresponde al ángulo $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

Segunda solución:

Elegimos el sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^3$ de modo que el plano $\pi : z = 0$ es el que pasa por los vértices A, B y C, y colocamos el centro O de $\mathcal{R}$ en el baricentro del triángulo ABC. Tomamos como eje OX del plano π la recta que pasa por O y es paralela a la arista AB, y como eje OY la recta perpendicular a OX que pasa por O.



Las coordenadas de A, B y C respecto de $\mathcal{R}$ son $A = (-a, b, 0)$, $B = (a, b, 0)$, $C = (0, -c, 0)$, para ciertos números reales positivos a, b y c. De hecho $c = 2b$ pues las coordenadas del baricentro de un triángulo son la media aritmética de las de sus vértices.
Además, el triángulo ABC es equilátero, luego

$$4a^2 = AB^2 = BC^2 = a^2 + (b+c)^2 = a^2 + 9b^2$$

y entonces, $a = b\sqrt{3}$. El enunciado es independiente de la longitud de las aristas, luego podemos elegir $\mathcal{R}$ de modo que $b = 1$, así que los vértices A, B y C son

$$A = (-\sqrt{3}, 1, 0), \qquad B = (\sqrt{3}, 1, 0), \qquad C = (0, -2, 0)$$

El cuarto vértice D está en la perpendicular al plano π que pasa por O, luego existe $d \in \mathbb{R}$, que podemos suponer positivo, tal que $D = (0, 0, d)$. De hecho

$$12 = AB^2 = DC^2 = 4 + d^2$$

así que $d = 2\sqrt{2}$. Los puntos E de la arista AB se parametrizan mediante $E = (t,1,0)$, con $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$. Denotaremos $\alpha(t) = \measuredangle CED$ y se trata de maximizar este ángulo cuando $t \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$, o lo que es igual, minimizar su coseno. Las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{EC}$ y $\overrightarrow{ED}$ son $\overrightarrow{EC} = (-t,-3,0)$ y $\overrightarrow{ED} = (-t,-1,2\sqrt{2})$, luego:

$$\cos\alpha(t) = \frac{\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}}{EC \cdot ED} = \frac{t^2+3}{\sqrt{t^2+9} \cdot \sqrt{t^2+9}} = \frac{t^2+3}{t^2+9} = 1 - \frac{6}{t^2+9}$$

que es mínimo para $t = 0$. Por tanto, el ángulo $\measuredangle CED$ es máximo cuando E es el punto medio de la arista AB.

(págs. 132 a 134):

06.26. Sea $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ una función par y continua y sea a un número real positivo y distinto de 1. Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{a^x+1}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \tag{1}$$

y calcule

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x-1}{\left(e^x+1\right)\left(x^2+1\right)}\,dx$$

(Baleares. Opción A)

Solución:

La función f es par y por tanto su gráfica es simétrica respecto del eje OY; de ello se deduce que

$$\int_0^1 f = \int_{-1}^0 f\,, \qquad \text{es decir,} \qquad \int_{-1}^1 f = \int_{-1}^0 f + \int_0^1 f = 2\int_0^1 f$$

Por tanto, demostrar la igualdad (1) es exactamente lo mismo que demostrar cualquiera de las siguientes igualdades equivalentes entre sí:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{a^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{a^x+1}\,dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} f(x)\,dx = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-1}^1 f(x)\left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}\right)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-1}^1 f(x)\frac{a^x-1}{a^x+1}\,dx = 0$$

La función $x \mapsto g(x) = \frac{a^x-1}{a^x+1}$ está definida en $\mathbb{R}$ por ser $a > 0$ y cumple que:

$$g(-x) = \frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1} = \frac{1-a^x}{1+a^x} = -g(x)$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$, por lo que se trata de una función impar. Ahora bien, como el producto de una función par por otra función impar es una función impar, resulta que fg es impar, y así,

$$\int_{-1}^0 fg = -\int_0^1 fg\,, \qquad \text{es decir,} \qquad \int_{-1}^1 fg = \int_{-1}^0 fg + \int_0^1 fg = 0$$

que equivale a:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{a^x - 1}{a^x + 1}\,dx = 0 \qquad (2)$$

y que es la igualdad que debía probarse. Obsérvese que no se ha utilizado en ninguna parte del razonamiento el que sea $a \neq 1$.

Para la segunda parte del problema, la integral a calcular se puede escribir:

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1}{\left(e^x + 1\right)\left(x^2 + 1\right)}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$$

Tomando así como f a la función $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$, que es evidentemente par y continua, y haciendo $a = e$, resulta de la igualdad (2) anterior que la integral pedida es nula.

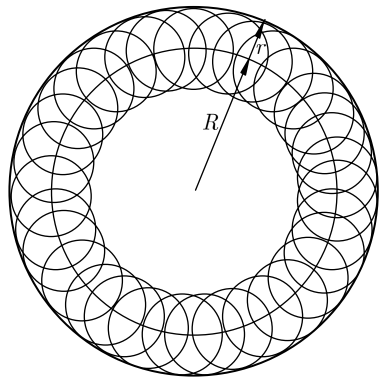
(págs. 151 a 154):

06.33. Consideramos una circunferencia de radio R. Esta circunferencia se divide en n partes iguales mediante los puntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Cada uno de estos puntos se toma como centro para trazar un arco de circunferencia de radio r. Suponiendo un valor de n suficientemente grande, cada uno de estos arcos se corta con el trazado desde el punto anterior y con el trazado desde el punto siguiente, formándose así una línea cerrada que rodea a la primera circunferencia. Calcule el límite de la longitud de esta línea cerrada cuando el número n de puntos aumenta indefinidamente.

(Galicia)

Solución:

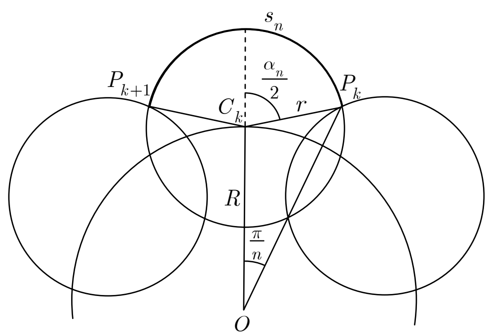
Una primera aproximación al problema permite aventurar que la línea cerrada que se construye tiende a confundirse, cuando $n \to \infty$, con la envolvente exterior de las circunferencias de radio r que se forman tomando como centros los puntos de la circunferencia de radio R. Dicha envolvente es la circunferencia de radio $R + r$ cuya longitud es $2\pi(R + r)$. Pongamos de acuerdo a razón e intuición.



Supongamos dividida la circunferencia de radio R en n partes iguales, con n suficientemente grande para que cada circunferencia de radio r sea secante con la anterior y la posterior. Para calcular la longitud s_n de cualquiera de los arcos de circunferencia de radio r es suficiente con que determinemos el ángulo α_n correspondiente al arco s_n, dado que es

$$s_n = \alpha_n \cdot r$$

Sea O el centro de la circunferencia de radio R y, para cada $k = 1, \ldots, n-1$, sea P_{k+1} el punto exterior a la circunferencia anterior donde se cortan las circunferencias de centros C_k y C_{k+1}. En el triángulo OC_kP_k se conocen:



$$OC_k = R\,, \qquad C_kP_k = r\,, \qquad \measuredangle P_kOC_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$$

Como $\frac{\alpha_n}{2}$ es un ángulo exterior del triángulo OC_kP_k, ocurre que:

$$\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\pi}{n} + \measuredangle C_k P_k O$$

y por tanto,

$$\measuredangle C_k P_k O = \frac{\alpha_n}{2} - \frac{\pi}{n}$$

Así, por el *Teorema de los senos*:

$$\frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = \frac{R}{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{2} - \frac{\pi}{n} \right)}$$

es decir,

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha_n}{2} - \frac{\pi}{n} \right) = \frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

y dado que, para n suficientemente grande, son

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} < \frac{r}{R} \qquad \text{y} \qquad \frac{\alpha_n}{2} - \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$$

se tiene que:

$$\frac{\alpha_n}{2} - \frac{\pi}{n} = \operatorname{arcsen} \left(\frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)$$

luego

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{n} + 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)$$

La longitud s_n de cada arco de circunferencia $P_k P_{k+1}$ es así:

$$s_n = \alpha_n r = \frac{2\pi r}{n} + 2r \operatorname{arcsen} \left(\frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)$$

La suma de las longitudes de los n arcos $P_k P_{k+1}$ de radio r es, entonces:

$$ns_n = 2\pi r + 2rn \operatorname{arcsen}\left(\frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)$$

y sólo resta calcular el límite de la suma anterior cuando $n \to \infty$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} ns_n = 2\pi r + 2r \lim_{n\to\infty} n \operatorname{arcsen}\left(\frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)$$

Como quiera que los infinitésimos $\operatorname{arcsen} x$ y x son equivalentes cuando $x \to 0$, y es $\lim_{n\to\infty} \frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = 0$, podemos escribir, por el *Principio de sustitución de variables equivalentes*,

$$\lim_{n\to\infty} ns_n = 2\pi r + 2r \lim_{n\to\infty} n \frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = 2\pi r + 2R \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

Por último, y como también $\operatorname{sen} x \sim x$ cuando $x \to 0$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} ns_n = 2\pi r + 2R \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = 2\pi r + 2R \lim_{n\to\infty} n \frac{\pi}{n} = 2\pi r + 2R\pi =$$

$$= 2\pi (r + R)$$

tal y como la intuición nos hizo sospechar.

(págs. 503 a 506):

09.8. En una urna se introducen sucesivamente n bolas, cada una de las cuales puede ser blanca o negra, con igual probabilidad. A continuación se extraen al azar tres bolas de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna contenga sólo bolas blancas, si las tres bolas extraídas han sido blancas?

(Comunidad Valenciana)

Solución:

Suponiendo que las extracciones de las tres bolas se llevan a cabo sin reemplazamiento, el que las tres bolas extraídas hayan sido blancas obliga a que sea $n \geq 3$ (en las observaciones del final del problema se resuelve éste en el caso de extracciones con reemplazamiento).

El número de bolas blancas que hay en la urna después de introducir las n bolas sigue una distribución binomial de parámetros n y $p = \frac{1}{2}$. Es por ello que si se llama U_k al suceso "*la urna queda con k bolas blancas y $n-k$ bolas negras*", será:

$$p(U_k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \text{para } k = 0,1,2,\ldots,n$$

Si se llama B al suceso "*las tres bolas extraídas son blancas*", la probabilidad que pide el problema es la del suceso U_n condicionada por el suceso B. Según la *Fórmula de Bayes*:

$$p(U_n / B) = \frac{p(U_n)\, p(B / U_n)}{\sum_{k=0}^{n} p(U_k)\, p(B / U_k)} \tag{1}$$

Para cada $k = 0,1,\ldots,n$, la probabilidad $p(B / U_k)$ es la probabilidad de obtener tres bolas blancas al extraer al azar tres bolas de una urna que contiene k bolas blancas y $n-k$ bolas negras. Dicha probabilidad es nula si $k \in \{0,1,2\}$, mientras que si $k \in \{3,4,\dots,n\}$,

$$p(B / U_k) = \frac{\binom{k}{3}}{\binom{n}{3}}$$

por lo que:

$$\sum_{k=0}^{n} p(U_k)\, p(B / U_k) = \sum_{k=3}^{n} p(U_k)\, p(B / U_k) = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{\binom{k}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{1}{2^n \binom{n}{3}} \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{3}$$

Para cada $k \in \{3,4,\dots,n\}$ es:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{3} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{3!(k-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-k)!(k-3)!} =$$

$$= \binom{n}{3}\binom{n-3}{k-3}$$

luego:

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{3} = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{3}\binom{n-3}{k-3} = \binom{n}{3} \sum_{k=3}^{n} \binom{n-3}{k-3} = \binom{n}{3}(1+1)^{n-3} = \binom{n}{3} 2^{n-3}$$

y deducimos que:

$$\sum_{k=0}^{n} p(U_k)\, p(B / U_k) = \frac{1}{2^n \binom{n}{3}} \cdot \binom{n}{3} 2^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

La probabilidad que pide el problema es, después de sustituir en (1):

$$p\left(U_n / B\right) = \frac{p\left(U_n\right) p\left(B / U_n\right)}{\sum_{k=0}^{n} p\left(U_k\right) p\left(B / U_k\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2^{n-3}}$$

OBSERVACIONES

Resolvemos el problema en el caso de que las extracciones de las bolas se lleven a cabo con reemplazamiento. En tal supuesto sería, para $k = 0,1,2,\ldots,n$:

$$p\left(B / U_k\right) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

luego:

$$\sum_{k=0}^{n} p\left(U_k\right) p\left(B / U_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{2^n n^3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$$

Para calcular la última suma descomponemos k^3 , para $k \geq 3$, como sigue:

$$k^3 = k\left(k-1\right)\left(k-2\right) + 3k^2 - 2k = k\left(k-1\right)\left(k-2\right) + 3k\left(k-1\right) + 3k - 2k =$$

$$= k\left(k-1\right)\left(k-2\right) + 3k\left(k-1\right) + k$$

de modo que:

$$\binom{n}{k} k^3 = \binom{n}{k} k\left(k-1\right)\left(k-2\right) + 3\binom{n}{k} k\left(k-1\right) + \binom{n}{k} k =$$

$$= n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\binom{n-3}{k-3} + 3n\left(n-1\right)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1}$$

Entonces:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^3 = \binom{n}{1} + 8\binom{n}{2} + \sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}k^3 =$$

$$= n + 4n\left(n-1\right) + n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\sum_{k=3}^{n}\binom{n-3}{k-3} + 3n\left(n-1\right)\sum_{k=3}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum_{k=3}^{n}\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= n + 4n\left(n-1\right) + n\left(n-1\right)\left(n-2\right)2^{n-3} + 3n\left(n-1\right)\left(2^{n-2}-1\right) + n\left(2^{n-1}-n\right) =$$

$$= n^2\left(n+3\right)2^{n-3}$$

Así,

$$\sum_{k=0}^{n} p\left(U_k\right)p\left(B \,/\, U_k\right) = \frac{1}{2^n n^3}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^3 = \frac{1}{2^n n^3}\cdot n^2\left(n+3\right)2^{n-3} = \frac{n+3}{8n}$$

La probabilidad que se pide es, en el caso de que las extracciones sean con reemplazamiento,

$$p\left(U_n \,/\, B\right) = \frac{p\left(U_n\right)p\left(B \,/\, U_n\right)}{\sum_{k=0}^{n} p\left(U_k\right)p\left(B \,/\, U_k\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{n+3}{8n}} = \frac{n}{2^{n-3}\left(n+3\right)}$$