DEIMOS
Oposiciones a Profesores de Secundaria
Oposiciones a Diplomados en Estadística del Estado
C/ Fernández de los Ríos 75,1º Izda.
28015 MADRID
☎ 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
http://academiadeimos.blogspot.com.es
editorial@ academiadeimos.es
academia@ academiadeimos.es

OPOSICIONES A PROFESORES ENSEÑANZA SECUNDARIA
MATEMÁTICAS

Problemas propuestos en Madrid el 18 de Junio de 2016

Problema 1. Se define, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \sum_{i,j=1}^{n} i^j$$

Demuestre que si p es un número primo, entonces $f(p+1)$ es múltiplo de p.

Una solución

Sea p un número primo. El término $f(p+1)$ de la sucesión puede escribirse, aplicando la fórmula que da la suma de términos consecutivos de una progresión geométrica, como

$$f(p+1) = \sum_{i,j=1}^{p+1} i^j = \sum_{j=1}^{p+1}\left(\sum_{i=1}^{p+1} i^j\right) = \sum_{j=1}^{p+1}\left[1 + 2^j + 3^j + \cdots + p^j + (p+1)^j\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{p+1} 1 + \sum_{j=1}^{p+1} 2^j + \cdots + \sum_{j=1}^{p+1} p^j + \sum_{j=1}^{p+1} (p+1)^j =$$

$$= (p+1) + \frac{2^{p+2}-2}{1} + \frac{3^{p+2}-3}{2} + \cdots + \frac{p^{p+2}-p}{p-1} + \frac{(p+1)^{p+2}-(p+1)}{p} \qquad (1)$$

Se busca ahora, para cada uno de los $p+1$ sumandos anteriores, un número natural sencillo que sea congruente módulo p con dicho sumando. Para el primero la cosa es fácil, pues $p+1 \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$. Para cualquiera de los siguientes $p-1$ sumandos, según el *Pequeño Teorema de Fermat*, y por ser p número primo, será $k^p \equiv k \,(\operatorname{mod} p)$, luego $k^{p+2} \equiv k^3 \,(\operatorname{mod} p)$, para todo $k = 2, 3, \ldots, p$.

Por tanto, si se llama

$$s_k = \frac{k^{p+2} - k}{k-1}, \quad \text{para } k = 2, \ldots, p$$

entonces

$$(k-1)\, s_k = k^{p+2} - k \equiv k^3 - k = k\,(k^2 - 1) = k\,(k+1)(k-1) (\operatorname{mod} p)$$

es decir,

$$(k-1)\, s_k \equiv k\,(k+1)(k-1) (\operatorname{mod} p),$$

y como es $\operatorname{mcd}(k-1, p) = 1$ para todo $k = 2, \ldots, p$ por ser p número primo y $k-1 < p$, podemos dividir por $k-1$ en la última congruencia, resultando que

$$s_k = \frac{k^{p+2} - k}{k-1} \equiv k\,(k+1) (\operatorname{mod} p)$$

El anterior razonamiento no sirve para para el último sumando de (1), pero para éste la cuestión no tiene dificultad pues dicho sumando es

$$\frac{(p+1)^{p+2} - (p+1)}{p} = \sum_{j=1}^{p+1} (p+1)^j \equiv \sum_{j=1}^{p+1} 1^j = p + 1 \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$$

Por tanto, según (1) será

$$f\,(p+1) \equiv 1 + \sum_{k=2}^{p} k\,(k+1) + 1 = 1 + \sum_{k=2}^{p} k^2 + \sum_{k=2}^{p} k + 1 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + \sum_{k=1}^{p} k =$$

$$= \frac{p \cdot (p+1) \cdot (2p+1)}{6} + \frac{p \cdot (p+1)}{2} = \frac{p \cdot (p+1) \cdot (p+2)}{3} (\operatorname{mod} p)$$

y en consecuencia $3f(p+1) \equiv p\,(p+1)(p+2) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, es decir,

$$3f(p+1) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$$

La simplificación de la anterior congruencia obliga a distinguir como sigue:

- Si $\operatorname{mcd}(p, 3) = 1$, o lo que es equivalente por ser p primo, si $p \neq 3$, puede dividirse por 3 en los dos miembros de la última congruencia, resultando que $f(p+1) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, es decir, que $f\,(p+1)$ es múltiplo de p.

- Si $\operatorname{mcd}(p,3) \neq 1$, esto es, si $p = 3$, entonces

$$f(p+1) = f(4) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} i^j = \sum_{j=1}^{4}(1+2^j+3^j+4^j) =$$

$$= (1+2+3+4)+(1+4+9+16)+(1+8+27+64)+(1+16+81+256) =$$

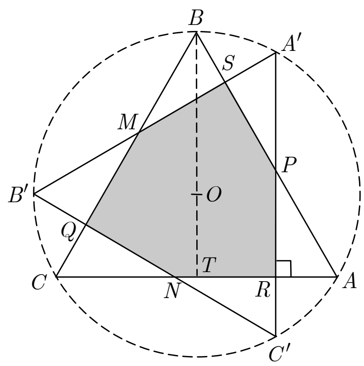
$$= 494$$

que no es múltiplo de 3.

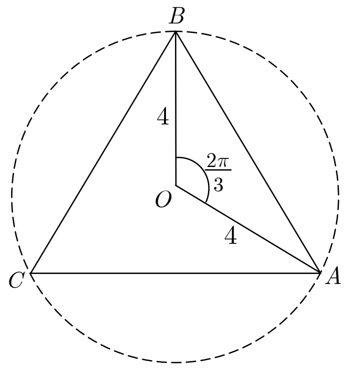
Todo lo escrito demuestra que, para p primo, el número natural $f(p+1)$ es múltiplo de p si y sólo si $p \neq 3$, en contra de lo que pide el enunciado del problema.

Problema 2. Un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de centro O y radio 4 cm se gira un ángulo recto en torno al punto O obteniendo un nuevo triángulo. Determine el área de la parte común a ambos triángulos.

Una solución



Sea ABC el triángulo equilátero original y sea $A'B'C'$ su transformado por el giro de centro O y amplitud $\frac{\pi}{2}$. Calcularemos el área del hexágono común $\mathcal{H}$ a ambos triángulos como la diferencia entre el área del triángulo original ABC y la suma de las áreas de los triángulos APR, BMS y CNQ, donde M, Q N, R, P y S son las intersecciones de los lados de ambos triángulos que se indican en el gráfico.



Para calcular $\text{área}(ABC)$, puede aplicarse el *Teorema del coseno* en el triángulo OAB . Como es $\measuredangle AOB = \frac{2\pi}{3}$, se deduce que

$$AB^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot \cos\frac{2\pi}{3} = 32 - 32\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 48$$

luego

$$AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

La altura BT del triángulo ABC se deduce del *Teorema de Pitágoras*, y es

$$BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

de modo que

$$\text{área}\,(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BT = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Los lados AC y $A'C'$ son perpendiculares entre sí, luego el triángulo APR es rectángulo. Como los giros conservan distancias y ángulos y los triángulos BMS y CNQ son el resultado de girar alrededor de O el triángulo APR ángulos de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ radianes, respectivamente, los tres triángulos son rectángulos y congruentes entre sí, por lo que sus áreas coinciden. Para calcular el área de uno cualquiera de ellos, pongamos APR, obsérvese que este triángulo es semejante al triángulo ABT, luego

$$\frac{PR}{BT} = \frac{AR}{AT}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{PR}{6} = \frac{AR}{2\sqrt{3}} \tag{1}$$

Ahora bien, $AR = AT - TR$, donde TR coincide con la distancia del centro O del triángulo equilátero $A'B'C'$ a uno cualquiera de sus lados y que, a su vez, es la mitad de la distancia $OB' = 4$, es decir $TR = 2$ cm y por tanto

$$AR = AT - TR = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$$

De (1) se deduce así que

$$PR = \frac{6}{2\sqrt{3}} AR = \sqrt{3} \cdot AR = \sqrt{3} \cdot 2(\sqrt{3} - 1) = 2(3 - \sqrt{3}) \text{ cm}$$

y que el área del triángulo rectángulo APR es

$$\text{área}\,(APR) = \frac{1}{2} \cdot AR \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{3} - 1) \cdot 2(3 - \sqrt{3}) = 4(2\sqrt{3} - 3) \text{ cm}^2$$

El área del hexágono común $\mathcal{H}$ a ambos triángulos es por tanto

$$\text{área}\,(\mathcal{H}) = \text{área}\,(ABC) - 3 \cdot \text{área}\,(APR) = 12\sqrt{3} - 12(2\sqrt{3} - 3) =$$

$$= 12(3 - \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

Problema 3. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Calcule la longitud de la curva $\mathcal{C}$ que tiene por ecuación:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1 \qquad (a > 0)$$

b) Sea f una función real de variable real que cumple, para los x de cierto intervalo que contiene al origen, la desigualdad $\left|f(x)\right| \leq \left|x\right|^r$, donde $r > 1$. Demuestre que f es derivable en el origen y calcule $f'(0)$.

El apartado a) figura resuelto en la página 193 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y es también parte del problema 99.1 del volumen 4. Además, este problema se resuelve todos los años a los nuevos alumnos de Academia Deimos en sus clases prácticas.

Una solución

a) Si (x,y) es un punto cualquiera de la curva $\mathcal{C}$, también son de $\mathcal{C}$ los puntos $(x,-y)$ y $(-x,y)$, de modo que la curva es simétrica respecto de ambos ejes coordenados OX y OY. Es por ello que sólo parametrizaremos el arco $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ situado en el primer cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$. Si (x,y) es un punto de $\mathcal{C}_1$, entonces

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}\right]^2 + \left[\left(\frac{y}{a}\right)^{1/3}\right]^2 = 1$$

De ello se desprende que el punto $((\frac{x}{a})^{1/3}, (\frac{y}{a})^{1/3})$ está sobre el arco de la circunferencia de centro el origen y radio 1 contenido en el primer cuadrante, así que existe $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} = \cos t\,, \qquad \left(\frac{y}{a}\right)^{1/3} = \operatorname{sen} t\,.$$

Elevando al cubo en ambas igualdades se obtiene una parametrización simple y regular del arco $\mathcal{C}_1$, que es

$$x(t) = a\cos^3 t\,, \qquad y(t) = a\operatorname{sen}^3 t\,, \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Dada la simetría de $\mathcal{C}$ respecto de ambos ejes, y dado que son $x'(t) = -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t$, $y'(t) = 3a\operatorname{sen}^2 t \cos t$, la longitud de la curva $\mathcal{C}$ es:

$$l(\mathcal{C}) = 4 \cdot l(\mathcal{C}_1) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t\,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} 3a \cos t \operatorname{sen} t dt = 6a\Big[\operatorname{sen}^2 t\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= 6a\,.$$

b) Según el enunciado, la función f está al menos definida en algún intervalo I (que supondremos no degenerado) que contiene al origen y cuyos puntos $x \in I$ cumplen $\left|f(x)\right| \leq \left|x\right|^r$. De esta condición se deduce que

$$\left|f(0)\right| \leq \left|0\right|^r = 0\,, \qquad \text{esto es, que} \qquad f(0) = 0\,.$$

- Si el origen es un punto interior del intervalo I y $x \in I$, con $x \neq 0$, entonces

$$0 \leq \left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{\left|f(x)\right|}{\left|x\right|} \leq \frac{\left|x\right|^r}{\left|x\right|} = \left|x\right|^{r-1}$$

Dado que es $r - 1 > 0$, ocurre que $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\right|^{r-1} = 0$, y de la *Regla del sandwich* de deduce que

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = 0\,, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

La función f es por tanto derivable en el origen y $f'(0) = 0$.

- Si el origen no es un punto interior del intervalo I, será el mínimo o el máximo del intervalo I. Razonando como se ha hecho en el caso anterior, pero cambiando los límites cuando $x \to 0$ por $x \to 0^+$ o por $x \to 0^-$, se demuestra respectivamente que $f'(0^+) = 0$ o que $f'(0^-) = 0$, que es lo más que se podría asegurar en este caso.

16.4. Tres máquinas A, B y C producen una determinada pieza. La máquina A la elabora con una longitud que se distribuye según una distribución normal de parámetros $\mu = 165$ y $\sigma = 5$; la máquina B la fabrica con una longitud que se distribuye según una distribución normal de parámetros $\mu = 175$ y $\sigma = 5$, y la máquina C también las hace con una longitud que se distribuye normalmente de parámetros $\mu = 170$ y $\sigma = 5$. Las longitudes son en metros y las tres máquinas fabrican en gran cantidad.

a) El 50% de la producción la hace la máquina A, el 20% de la producción la realiza la máquina B y el resto la máquina C. Se eligen tres piezas al azar y se sabe que miden más de 173 m. cada una, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezcan a la tercera máquina?

b) Si se eligen 100 piezas al azar de la máquina B, independientes unas de otras, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 60 midan más de 173 m?

Una solución

a) Las variables aleatorias X_A, X_B y X_C, que miden la longitud (en metros) de las piezas fabricadas por las máquinas A, B y C. Se consideran los sucesos A, B y C que expresan que "*la pieza ha sido fabricada por la máquina* A*,* B *o* C" y cuyas probabilidades son:

$$p(A) = 0,5\,, \quad p(B) = 0,2\,, \quad p(C) = 0,3\,.$$

Por último, sea M el suceso "*la pieza fabricada mide más de* 173 *m*". Las probabilidades de este suceso condicionado a la máquina que ha fabricado la pieza se obtienen tipificando las variables X_A, X_B y X_C, que son normales de medias respectivas 165, 175 y 170 metros y desviación típica 5 metros (para las tres la misma). Si llamamos Z a una variable normal estándar, entonces son

$$p_A = p(M \mid A) = p(X_A > 173) = p\left(Z > \frac{173-165}{5}\right) = p(Z > 1{,}6) \approx 0.0548$$

$$p_B = p(M \mid B) = p[X_B > 173] = p\left[Z > \frac{173-175}{5}\right] = p[Z > -0,4] =$$

$$= 1 - p[Z > 0,4] \approx 0.6554$$

$$p_C = p(M \mid C) = p[X_C > 173] = p\left[Z > \frac{173-170}{5}\right] = p[Z > 0{,}6] \approx 0.2743$$

Según el Teorema de Bayes, la probabilidad p de que una pieza seleccionada al azar sea producida por la máquina C, si sabemos que mide más de 173 m, es

$$p = p(C \mid M) = \frac{p(C) \cdot p(M \mid C)}{p(M)} = \frac{p(C) \cdot p_C}{p(A) \cdot p_A + p(B) \cdot p_B + p(C) \cdot p_C} =$$

$$\approx \frac{0,3 \cdot 0,2743}{0,5 \cdot 0,0548 + 0,2 \cdot 0,6554 + 0,3 \cdot 0,2743} \approx 0,3418$$

Por tanto, si se eligen tres piezas cuya longitud sea mayor que 173 m, la probabilidad de que las tres hayan sido elaboradas por la máquina A será:

$$p^3 = 0,0399 \,.$$

b) Sea T la variable aleatoria que mide el número de piezas fabricadas por la máquina B cuya longitud es mayor que 173 m. Dado que $p_B \approx 0,6554$, la variable T sigue una distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p_B \approx 0,6554$, por lo que la probabilidad pedida sería:

$$p[T \geq 60] = \sum_{k=60}^{100} p[T = k] = \sum_{k=60}^{100} \binom{100}{k} (p_B)^k \left(1 - p_B\right)^{100-k}$$

Para su cálculo aproximado, podemos acudir al *teorema de De Moivre-Laplace*, que permite aproximar la distribución de T a una normal T' cuyos parámetros serán

$$\mu = n \cdot p_B = 100 \cdot 0.6554 = 65,54$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p_B \cdot \left(1 - p_B\right)} = \sqrt{100 \cdot 0.6554 \cdot (1 - 0.6554)} \approx 4,7524 \,.$$

Dado que T es una variable aleatoria discreta y que T' es una variable normal, luego, continua, según la *corrección de Fisher* será:

$$p[T \geq 60] = p[T' \geq 59,5] = p\left[Z \geq \frac{59,5 - 65,54}{4,7524}\right] \approx p[Z \geq -1.27] = 1 - p[Z \geq 1,27] \approx 0,8980$$